

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ А.Е. Митяев
подпись
« ____ » _____ 2017 г.

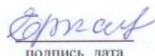
БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

15.03.03 Прикладная механика

**Энергетический вариационный принцип в задачах
гидродинамической теории смазки**

Пояснительная записка

Руководитель


подпись, дата

профессор, д.ф.-м..н.
должность, ученая степень

Н.В. Еркаев
инициалы, фамилия

Выпускник

29.06.2017
подпись, дата

В. Сизаско
инициалы, фамилия

Красноярск 2017

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ А.Е. Митяев
подпись
« ____ » _____ 2017 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

15.03.03 Прикладная механика

**Энергетический вариационный принцип в задачах
гидродинамической теории смазки**

Пояснительная записка

Руководитель

подпись, дата

профессор, д.ф.-м..н.
должность, ученая степень

Н.В. Еркаев
инициалы, фамилия

Выпускник

подпись, дата

В. Сизаско
инициалы, фамилия

Красноярск 2017

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Кафедра «Прикладная механика»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ А.Е. Митяев
(подпись)
« ____ » _____ 2017 г

**ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
в форме бакалаврской работы**

Студенту (ке) _____ *Сизаско Всеволоду* _____

Группа MT 13-05Б Направление (специальность) 15.03.03
_____ *«Прикладная механика»* _____

Тема выпускной квалификационной работы: *Энергетический* _____
вариационный принцип в задачах гидродинамической теории смазки _____

Утверждена приказом по университету № 17812/с от 30 декабря 2016
Руководитель БР *Н.В. Еркаев профессор, д.ф.-м.н. «Прикладная*
механика» _____

Исходные данные для БР

Программа для определения распределения давления в смазочном слое подшипника скольжения при разной интенсивности нагружения вала.

Перечень разделов БР

- 1) О вариационных принципах;*
- 2) Теория смазки;*
- 3) Постановка задачи гидродинамической теории смазки в подшипниках скольжения;*
- 4) Вариационный подход к решению задачи ;*
- 5) Подготовка к расчетам в программе MathCad;*
- 6) Расчеты и графическая интерпретация;*
- 7) Выводы.*

Перечень графического или иллюстративного материала с указанием основных слайдов:

- 1) Распределение давления по углу поворота и сечениям;*
- 2) Распределение мощности тепловыделения по углу поворота и сечениям;*
- 3) Зависимости момента сил трения, функционалов давления и функции тока от порядкового номера итераций;*
- 4) Зависимости несущей способности, момента вязких сил трения от нагрузок;*
- 5) Выводы*

Руководитель БР

(подпись)

Н.В. Еркаев

Задание принял к исполнению

(подпись)

В. Сизаско

« ____ » _____ 2017 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ГРАФИК
выполнения этапов БР

Наименование и содержание этапа	Срок выполнения	Примечание
1 Прохождение преддипломной практики	24.04.2017 – 04.06.2017	
2 Анализ собранных материалов	05.06.2017 – 09.06.2017	
3 Работа над теоретической частью проекта	10.06.2017 – 13.06.2017	
4 Работа над практической частью работы	14.06.2017 – 18.06.2017	
5 Оформление графической части работы	19.06.2017 – 21.06.2017	
6 Оформление пояснительной записки	22.06.2017	

Руководитель выпускной
квалификационной работы
«__»_____2017 г.

_____ Н.В. Еркаев

Студент МТ 13-05Б
«__»_____2017 г.

_____ В. Сизаско

СОДЕРЖАНИЕ

РЕФЕРАТ.....	3
ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 О вариационных принципах.....	5
1.1 Пример вариационной задачи. Задача о Брахистрохроне.....	5
1.2 Вариационная формулировка задач теплопроводности	6
1.3 Обобщение представленных формулировок.....	9
1.4 Термодинамические диссипативные системы.....	10
2 Теория смазки	14
3 Постановка задачи гидродинамической теории смазки в подшипниках скольжения	16
3.1 Уравнения движения смазочной жидкости.....	18
3.2 Уравнение Рейнольдса и его сопряженная форма	19
4 Вариационный подход к решению задачи	22
4.1 Вычисление функционала давления	22
4.2 Вычисление функционала для функции тока	24
4.3 Решение стационарного уравнения Рейнольдса	26
4.4 Мощность диссипации энергии и его связь.....	29
4.5 Минимизация функционала методом конечных элементов.....	31
5 Подготовка к расчетам в программе Mathcad.....	33
5.1 Численное дифференцирование функционала давления	34
5.2 Численное дифференцирование функционала для функции тока	36
6 Расчеты и графическая интерпретация	40
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	48
Список использованных источников	49

					БР-15.02.02 ПЗ				
Изм	Лист	№ докум.	Подпис	Дат					
Разраб.		Сизаско В.			Энергетический вариационный принцип в задачах гидродинамической	Лит.	Лист	Листов	
Провер.		Еркаев Н.В.						2	50
Реценз.						СФУ ПИ каф. ПМ Гр МТ12-05Б			
Н. Контр.		КолотовА.В.							
Утвержд.		Митяев А.Е.							

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа по теме «Энергетический вариационный принцип в задачах гидродинамической теории смазки» содержит 50 страниц текстового документа, 22 использованных источника, 12 графиков и рисунков.

МОМЕНТ СИЛ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ, ФУНКЦИОНАЛ, ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП, МОЩНОСТЬ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ, НОРМИРОВКА, ФУНКЦИЯ ТОКА, УРАВНЕНИЕ РЕЙНОЛЬДСА, НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ, УЗЛЫ ТРЕНИЯ, СМАЗОЧНЫЙ СЛОЙ, ТЕОРИЯ СМАЗКИ И ПОДШИПНИК СКОЛЬЖЕНИЯ.

Объект исследования – Подшипник скольжения.

Цели исследования:

- Вывод функционала от давления, имеющего минимум на решении стационарного уравнения Рейнольдса;
- Введение функции тока и вывод сопряженного уравнения, описывающего течение в смазочном слое;
- Вывод сопряженного функционала относительно функции тока;
- Установление связи функционалов с мощностью тепловыделения в смазочном слое;
- Применение функционала для получения оценки момента трения.

В итоге были составлены графики, которые отражают зависимости таких функций как: момент вязких сил трения, мощность тепловыделения, давление, функционалы давления и функции тока от углов поворота φ , линейной координаты z , относительного смещения вала $\tilde{\eta}$ и порядкового итераций n . Определена формула для оценки момента вязких сил трения.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						3
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

ВВЕДЕНИЕ

Подшипники – это устройства, которые являются частью опор вращающихся осей и валов механизма. Они подвергается осевым, радиальным и тангенциальным нагрузкам, приложенным к осям и валам, также они передают их корпусу, раме и остальным частям механизма в целом.

Подшипник скольжения – это такой тип подшипников, в котором трение происходит при скольжении сопряженных поверхностей. Для уменьшения трения применяют смазочные масла. От качества подшипников и смазочного материала зависит коэффициент полезного действия, и он уменьшается с увеличением момента вязких сил трения, который, в свою очередь, приводит к тепловыделению.

Для любой машины, либо механизма одним из важных критериев является надежность – это способность сохранять свои эксплуатационные показатели, функции в течение заданного времени. Вместе с этим немаловажную роль играет условия ее эксплуатации.

Современное техническое оборудование не может обойтись без подшипниковых узлов. Поэтому критерию надежности учеными и конструкторами уделяется немалое внимание. Разрабатываются оптимальные и простые в изготовлении конструкции подшипниковых узлов, выбираются материалы, наиболее подходящие по механическим характеристикам, улучшаются системы смазывания и смазочные материалы и все вышеперечисленное обеспечивает наилучшие эксплуатационные характеристики в узлах трения.

В данной работе будут применяться вариационные принципы, для получения приближенных решений в задачах гидродинамической теории смазки и для оценки важных триботехнических характеристик в узлах трения.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		4

1 О вариационных принципах

Вариационное исчисление - раздел математического анализа, связанный с решением задач на экстремум функций от функции. Соответствующие выражения, подлежащие оптимизации, носят название функционалов. Для одномерных задач вид функционала приводится ниже

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.1)$$

Минимизация функционала проводится при рассмотрении зависимости J от функции $y(x)$, выступающей в качестве аргумента. Рассмотрим пример вариационной задачи.

1.1 Пример вариационной задачи. Задача о Брахистрохроне

Найти кривую $y(x)$, минимизирующую время спуска без трения из одной точки в другую в поле тяжести. Элементарный отрезок пути dl материальная точка, движущаяся со скоростью u , проходит за время dt . Суммарное прохождение спуска длиной L составляет таким образом

$$T = \int_0^L dt = \int_0^L \frac{dl}{u} \quad (1.2)$$

Пусть кривая, описывающая траекторию спуска, имеет вид $y = y(x)$. Тогда элемент длины кривой

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.3)$$

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						5
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

Скорость спуска находится из заданного условия - движение происходит под действием силы тяжести без трения из состояния покоя, т.е. по законам свободного падения. В этом случае скорость движения определяется известной формулой

$$u = \sqrt{2gy} \quad (1.4)$$

Окончательно, время спуска по траектории $y(x)$ определяется выражением

$$T = \int_0^L \frac{dl}{u} = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (1.5)$$

Поставленная задача заключается в нахождении такой кривой между двумя точками a, b , которая обеспечит минимум величины T . Перейдем к рассмотрению применения вариационного принципа в задачах теплопроводности.

1.2 Вариационная формулировка задач теплопроводности

Рассмотрим пример: в бесконечном стержне квадратного поперечного сечения имеются внутренние источники постоянной мощности q_v , равномерно распределенные по объему стержня, генерирующие стационарное температурное поле в каждом поперечном сечении

$$T = T(x, y), \quad (1.6a)$$

$$0 \leq x \leq a, \quad (1.6б)$$

$$0 \leq y \leq a. \quad (1.6в)$$

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						6
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

На границе области (на сторонах квадрата) поддерживается нулевая температура. Имеется положительная константа λ . Задача теплопроводности [2] для рассматриваемого случая формулируется следующим образом

$$\operatorname{div}(T) = -\frac{q_v}{\lambda}. \quad (1.7)$$

Рассматривая выражение (1.7) как уравнение Эйлера - Лагранжа, построим функционал, соответствующий уравнению теплопроводности с нулевыми граничными условиями I рода

$$J = \int_0^a \int_0^a \left\{ \operatorname{div}(T) - 2T \frac{q_v}{\lambda} \right\} dx dy. \quad (1.8)$$

Граничные условия

Если варьируемая функция определена на границе, это эквивалентно исчезновению вариации. Функция в этом случае на границах области не варьируется. Однако при постановке граничных условий другого рода функция становится варьируемой на границах области и эта операция, отражающая влияние граничных условий, должна входить в вариационную формулировку соответствующей задачи. Проиллюстрируем сказанное задачей о распространении тепла внутри твердой стенки с внутренними источниками заданной плотности распределения $\psi(x)$ и непроницаемыми для тепла боковыми поверхностями. Вариационная формулировка соответствующей стационарной задачи теплопроводности

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \psi(x) = 0, \quad (1.9)$$

имеет вид функционала, уравнением Эйлера-Лагранжа для которого служит:

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						7
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$I = \int_a^b \left[\frac{1}{2} T_x^2 - T \psi(x) \right] dx, \quad (1.10)$$

где $\psi(x)$ - некоторая функция от x ; $T(x)$ - варьируемая функция, доставляющая минимум функционалу (1.10).

При определении вариации $T(x)$

$$\delta T = T^* - T = \varepsilon \eta(x), \quad (1.11)$$

где ε - некоторое значение; у нас в отличие от предыдущего нет оснований предполагать, что функция $\eta(x)$ обращается в нуль на границах области интегрирования.

Первая вариация функционала равна

$$\frac{\delta l}{\varepsilon} = T_x \eta \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \frac{d}{dx} T_x + \psi(x) dx. \quad (1.12)$$

Интегрируя по частям первый член подынтегрального выражения, получим

$$\frac{\delta l}{\varepsilon} = T_x \eta \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} T_x + \psi(x) \right] \eta(x) dx. \quad (1.13)$$

Если δl должна обращаться в нуль для всех возможных допустимых вариаций (ограниченных лишь условиями непрерывности), то должны удовлетворяться соотношения (1.9) и

$$\frac{dT}{dx} \eta \Big|_{x=a} = \frac{dT}{dx} \eta \Big|_{x=b} = 0, \quad (1.14)$$

что предполагает исчезновение производной искомой функции на границах области, если на ней допускается варьирование. Это естественные

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						8
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

граничные условия для рассматриваемого частного примера - они возникли непосредственно из вариационной задачи. Если на левой границе области реализуются граничные условия III рода

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=a} = hT|_{x=a}, \quad (1.15)$$

то вариационная формулировка видоизменяется

$$I = \int_a^b \left[\frac{1}{2} T_x^2 - T\psi(x) \right] dx + \left. \frac{h}{2} T^2 \right|_{x=a}. \quad (1.16)$$

Вариация функционала (1.16) равна

$$\frac{\delta I}{\varepsilon} = - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} T_x + \psi(x) \right] \eta(x) dx + \eta(x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=b} - \eta(x) \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=a} + hT\eta(x)|_{x=a}. \quad (1.17)$$

Обобщим представленный выше результат на случай трехмерного уравнения стационарной теплопроводности с нулевыми граничными условиями I рода

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{q_v}{\lambda}. \quad (1.18)$$

Функционал, уравнением Эйлера-Лагранжа которого является (1.18), имеет вид

$$J = \int_D \left\{ (\text{grad} T)^2 - 2T \frac{q_v}{\lambda} \right\} dV. \quad (1.19)$$

1.3 Обобщение представленных формулировок

Обобщение представленных формулировок на пространственные задачи имеет вид

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		9

$$I = \int_V \left\{ (grad T)^2 - 2\psi(x)T \right\} dV + \int_S \left\{ 2Tf(\vec{r}) + T^2 g(\vec{r}) \right\} dS, \quad (1.20)$$

где $f(\vec{r}), g(\vec{r})$ - заданные функции координат. Поскольку граничные условия не заданы, мы должны сохранить в первой вариации следующие члены

$$\frac{\partial I}{\varepsilon} = -2 \int_V [\Delta T + \psi(\vec{r})] \eta dV + \int_S [2 grad T \cdot \vec{n} + 2f(\vec{r}) + 2Tg(\vec{r})] \eta dS, \quad (1.21)$$

здесь \vec{n} - единичный вектор внешней нормали к поверхности. В результате рассуждений, аналогичных предыдущим, получаем два выражения, выполнение которых является следствием минимизации функционала (1.20)

$$\Delta T + \psi(\vec{r}) = 0, \quad (1.22)$$

$$grad T \cdot \vec{n} + f(\vec{r}) + Tg(\vec{r}) = 0 \text{ на } S. \quad (1.23)$$

Очевидно, что первое из выражений - уравнение Эйлера-Лагранжа функционала есть уравнение стационарной теплопроводности; второе представляет собой общую формулировку граничных условий соответствующей краевой задачи. Реализация представленных вариационных формулировок в конкретных задачах теории тепломассопереноса осуществляется применением прямых методов вариационного анализа.

Реализация представленных вариационных формулировок в конкретных задачах теории тепломассопереноса осуществляется применением прямых методов вариационного анализа [20; 21; 22].

1.4 Термодинамические диссипативные системы

Имеются два независимых поля - поля средних скоростей и их дисперсий (температур), в терминах которых и попытаемся сформулировать

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						10
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

вариационный принцип. При этом в качестве базовых переменных выберем поле средних смещений \bar{u} и поле так называемых тепловых смещений \bar{u}_T .

Для диссипативной гидродинамики функция Лагранжа, объединенная на основе суммирования вариационного принципа Гамильтона и вариационного принципа Онзагера, представленной в работе [8], имеет вид

$$L = C - F - T \int_0^t D dt', \quad (1.24)$$

где F - свободная энергия ($F = E - Ts$); C - кинетическая энергия; E - внутренняя энергия; D - диссипативная функция; s - скорость приращения энтропии; T - температура; t - время.

Согласно общему подходу, функцию Лагранжа (1.24) будем рассматривать как функцию двух указанных полей смещений \bar{u} и \bar{u}_T

$$L(\dot{\bar{u}}, \nabla \bar{u}, \nabla \bar{u}_T) = C(\dot{\bar{u}}) - F(\nabla \bar{u}, \nabla \bar{u}_T) - T_0 \int_0^t D(\dot{\bar{u}}, \dot{\bar{u}}_T) dt'. \quad (1.25)$$

При этом кинетическая энергия среднего движения является квадратичной функцией средних скоростей

$$2C(\dot{\bar{u}}) = \rho_0 \dot{\bar{u}}^2. \quad (1.26)$$

Свободная энергия в окрестности состояния термодинамического равновесия имеет минимум и, следовательно, представляется стандартной квадратичной формой, используемой в термоупругости [13]

$$2F(\nabla \bar{u}, T) = 2\mu \varepsilon_{ik}^2 + \lambda \varepsilon_{ll}^2 + 2\tilde{\alpha} \varepsilon_{ll} \left(\frac{T - T_0}{\theta T_0} \right) + \tilde{\kappa} \left(\frac{T - T_0}{\theta T_0} \right)^2, \quad (1.27)$$

где μ и λ - коэффициент Ламэ; ε_{ik} - тензор деформаций; $\tilde{\alpha}$ - функция процессов термодинамической релаксации; θ - безразмерный нормирующий множитель.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						11
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

Диссипативная функция должна быть квадратичной формой скоростей, обращающейся в ноль в состоянии термодинамического равновесия. Учитывая условие термодинамического равновесия $\vec{u} = \vec{u}_T$, запишем диссипативную функцию в виде квадрата разности скоростей массового и теплового смещений

$$2D(\dot{\vec{u}}, \dot{\vec{u}}_T) = \beta (\dot{\vec{u}} - \dot{\vec{u}}_T)^2. \quad (1.28)$$

Заметим, что безразмерный параметр θ вводится в определение потенциала теплового смещения, выведенного Био[2]

$$\theta \operatorname{div}(\vec{u}_T) = \frac{(T - T_0)}{T_0} \quad (1.29)$$

специально для того, чтобы запись диссипативной функции выглядела симметричной. В выражении (1.27) через $\tilde{\alpha}$ обозначен коэффициент, пропорциональный коэффициенту теплового расширения α , а последнее слагаемое с коэффициентом $\tilde{\kappa}$ в термоупругости обычно опускается.

Вариация действия с лагранжианом (1.25) по двум независимым полям смещений \vec{u} и \vec{u}_T при учете (1.27) и (1.28) приводит к следующим уравнениям движения этих полей

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \dot{\vec{u}} - \mu \Delta \vec{u} - (\lambda + \mu) \operatorname{grad} [\operatorname{div}(\vec{u})] - \tilde{\alpha} \operatorname{grad} [\operatorname{div}(\vec{u}_T)] = \beta (\dot{\vec{u}}_T - \dot{\vec{u}}), \quad (1.30a)$$

$$\beta (\dot{\vec{u}}_T - \dot{\vec{u}}) - \tilde{\kappa} \operatorname{grad} [\operatorname{div}(\vec{u}_T)] = \tilde{\alpha} \operatorname{grad} [\operatorname{div}(\vec{u})]. \quad (1.30b)$$

где ρ - плотность. Если выразим правую часть уравнения (1.30a) через уравнение (1.30b), а от самого уравнения (1.30b) возьмем дивергенцию и запишем дивергенцию теплового смещения через температуру

$$T = T_0(1 - \theta \operatorname{div}(\vec{u}_T)), \quad (1.31)$$

то получим обычную форму записи уравнений движения термоупругой среды в терминах поля смещений и температур

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \dot{\vec{u}} - \mu \Delta \vec{u} - (\lambda + \mu + \tilde{\alpha}) \operatorname{grad} [\operatorname{div}(\vec{u})] = \frac{(\tilde{\alpha} + \tilde{\kappa})}{\theta T_0} \operatorname{grad} T, \quad (1.32a)$$

$$\beta(T - T_0 \theta \operatorname{div} \dot{\vec{u}}) - \tilde{\kappa} \Delta T = \tilde{\alpha} T_0 \theta \Delta \operatorname{div} \vec{u}. \quad (1.32b)$$

Наиболее характерные черты вариационных принципов состоят в следующем:

1) Вариационный принцип всегда содержит положения, относящиеся к модели системы в целом.

2) Он всегда включает в себя дифференциальные уравнения, представляющие собой фундаментальные уравнения исследуемой области науки вместе с граничными условиями, условиями перехода и условиями принуждения.

2 Теория смазки

Подшипники скольжения, по типу трения, являются одними из важных устройств в нынешних машинах и механизмах. Они являются опорой для вращающихся валов и осей, покрытых слоем масел. Смазочный материал в антифрикционном слое распределяется неравномерно, что в конечном итоге приводит к локальному повышению давления на участке и возникновению поддерживающей силы.

Существуют различные приближенные формулы, которые аппроксимируют зависимость коэффициента вязкости от температуры и давления $\mu(P, T)$. На практике широко используется зависимость вида [19]

$$\mu(P, T) = \mu_0(T) e^{[\alpha(T)P]}, \quad (2.1)$$

здесь T - температура; P - давление; $\alpha(T)$ - пьезокоэффициент вязкости, линейнозависящий от температуры

$$\alpha(T) = \alpha_0 - k(T - T_0), \quad (2.2)$$

где α_0 - базовый пьезокоэффициент; k - температурный коэффициент; T_0 - базовая температура.

Коэффициент μ_0 зависит от температуры экспоненциально и определяется по следующей формуле

$$\mu_0(T) = \mu_0^* e^{-\delta(T - T_0)}, \quad (2.3)$$

здесь μ_0^* - базовый динамический коэффициент вязкости. Убывание коэффициента вязкости с ростом давления учитывается в уточненной формуле

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						14
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$\mu(P, T) = \mu_0(T) e^{\frac{\alpha(T)P}{1+\beta P}}, \quad (2.4)$$

где β - вторичный пьезокоэффициент.

Для улучшения свойств базовых масел применяются высокомолекулярные добавки [9; 15], позволяющие уменьшить температурные вариации (изменения) коэффициента вязкости.

Общие уравнения динамики несжимаемой жидкости с произвольной реологией имеют вид [12]

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \nabla \vec{u} + \operatorname{div}(\vec{P}) = \vec{F}, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0,$$

где ρ - плотность жидкости; \vec{u} - вектор скорости точек среды; t - время; F - вектор внешней силы, действующей на единицу объема. В случае ньютоновской реологии уравнение (2.5) принимает вид

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \nabla \vec{u} + \nabla \vec{P} = \vec{F} + \operatorname{div}(\mu \nabla \vec{u}), \quad (2.6)$$

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = 0.$$

Мощность диссипации энергии определяется выражением

$$\operatorname{div}(\vec{P} \vec{u}) - \operatorname{div}(\vec{P}) \vec{u} = \frac{1}{2} \mu \sum_{\substack{i=1...3 \\ k=1...3}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (2.7)$$

здесь i, k соответствуют декартовым координатам x, y, z .

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						15
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

3 Постановка задачи гидродинамической теории смазки в подшипниках скольжения

Гидродинамическая теория смазки широко применяется для расчета и конструирования подшипников скольжения с жидкой смазкой, которые являются важными конструктивными элементами разнообразных механизмов и машин. Впервые на работу смазочного материала обратил внимание Н.П. Петров [16]. Он дал всесторонний анализ проблемы трения деталей во вращательных механизмах, провел огромное количество обоснованных опытов и дал строгое решение задачи для случая кругового движения частиц жидкости с учетом вязкого трения. Рейнольдс рассмотрел течение в тонком смазочном слое, обосновал возможность отбрасывания нелинейных членов и получил упрощенное уравнение на распределение давления в смазочном слое.

Основными элементами конструкции гидродинамического подшипника скольжения, указанного в рисунке 3.1, являются цилиндрический вал - 1, смазочный слой, вкладыш - 2 и корпус - 3. Обычно вкладыш подшипника изготавливается из более податливого материала по сравнению с корпусом, который имеет высокую твердость и мало деформируется.

Вал подшипника скольжения радиусом кривизны R_0 вращается с постоянной угловой скоростью ω . Расстояние от центра вала до внутренней стенки вкладыша определяется радиусом кривизны R_1 , до внешней стенки радиусом кривизны R_2 , а до внешней границы корпуса радиусом кривизны R_3 , длина подшипника равняется L .

Координата “ y ” направлена вдоль вала. Полярная координата φ может быть определена из формулы произведением угловой скорости вращения вала на радиус внутренней границы вкладыша $\varphi = \omega R_1$.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						16
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

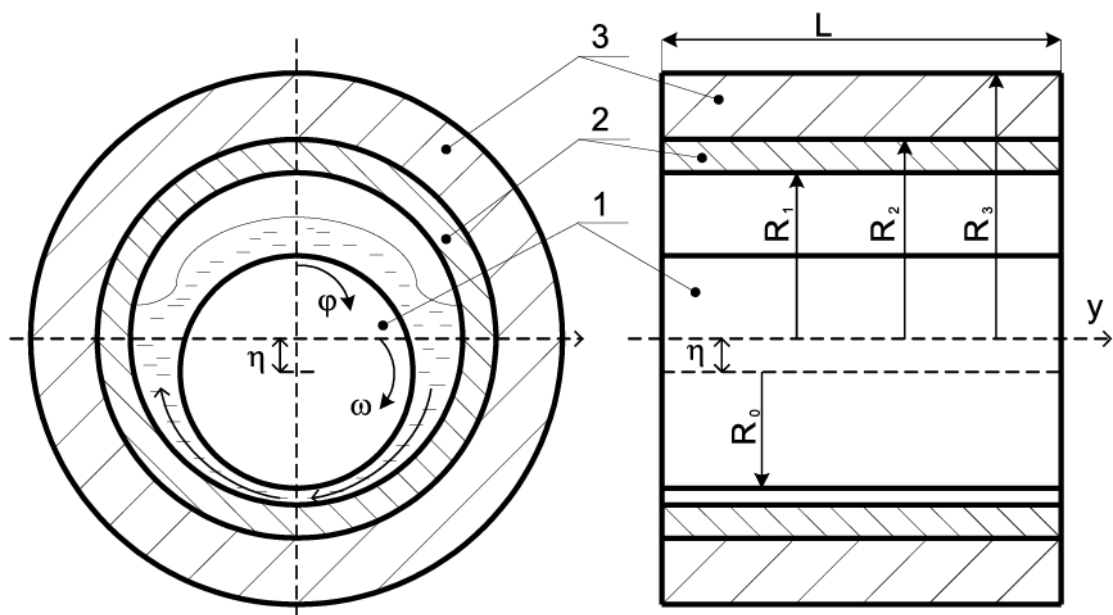


Рисунок 3.1 – Подшипник качения

Эксцентриситет вала η показывает смещение вала от центральной оси вращения. Для определения относительного смещения $\tilde{\eta}$ воспользуемся следующей формулой

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta}{D}, \quad (3.1)$$

где D - зазор между валом и стенкой вкладыша, в котором, для уменьшения трения между деталями, будет находиться тонкий слой смазочного материала. Зазор D определяется

$$D = R_1 - R_0. \quad (3.2)$$

Основные геометрические параметры подшипника скольжения были выше рассмотрены. Далее начнем определять характеристики смазочной жидкости. Условимся, что слои не смешиваются, а на границах у вкладыша будет отсутствовать проскальзывание смазки и вращение самой детали.

3.1 Уравнения движения смазочной жидкости

Распределение скорости в слое определяется уравнением Стокса [18]

$$\nabla P = \mu \operatorname{divgrad}(u), \quad (3.3)$$

т.к. $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}$ в сравнении с $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ намного больше, остальными членами пренебрегаем, в итоге имеем

$$\nabla P = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}, \quad (3.4)$$

здесь P – давление; n – нормальная координата; u – линейная скорость; μ – коэффициент вязкости.

Для тонких слоев можно пренебречь изменением давления поперек слоя. Интегрированием уравнения поперек слоя находим зависимость компонент скорости от нормальной координаты n [19]

$$u_x = \frac{1}{2\mu} n(n-h) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{h} (u_{1x} - u_{0x})n + u_{0x}, \quad (3.5a)$$

$$u_y = \frac{1}{2\mu} n(n-h) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{h} (u_{1y} - u_{0y})n + u_{0y}. \quad (3.5б)$$

На неподвижной поверхности вкладыша задаем нулевые граничные условия

$$u_{0x} = 0 \quad u_{0y} = 0. \quad (3.6)$$

С учетом (3.6) получаем выражения зависимости компонент скоростей u_x и u_y от нормальной координаты n

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						18
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$u_x = \frac{1}{2\mu} n(n-h) \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{u_{1x}}{h} n, \quad (3.7a)$$

$$u_y = \frac{1}{2\mu} n(n-h) \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{u_{1y}}{h} n. \quad (3.7б)$$

Компоненты скорости существенно зависят от градиента давления, которое в свою очередь определяется из интегрального уравнения сохранения массы.

3.2 Уравнение Рейнольдса и его сопряженная форма

При заданном смещении центра вала толщина слоя h между поверхностями вала и вкладыша определяется аналитической формулой

$$h(\varphi) = D \left[1 + \tilde{\eta} \cos(\varphi) + \tilde{d}(\tilde{P}) \right], \quad (3.8)$$

где, $\tilde{d}(\tilde{P})$ - нормированный прогиб вкладыша от безразмерного давления \tilde{P} . Прогиб в данной работе не учитывается и приравнивается к нулю при расчетах в вычислительных пакетах.

Удельный расход жидкости в слое определяется интегралом поперек слоя

$$\Gamma_x = \int_0^h V_x dn, \quad \Gamma_y = \int_0^h V_y dn. \quad (3.9)$$

Применяя закон сохранения массы, приходим к уравнению неразрывности

$$\operatorname{div}(\Gamma) = \frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.10)$$

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						19
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

Подставляя в уравнение неразрывности (3.10) компоненты скорости (3.7а), (3.7б), получаем классическое уравнение Рейнольдса [10]

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.11)$$

В стационарном случае $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial uh}{\partial x}. \quad (3.12)$$

можно ввести функцию тока ψ , определяемую через давление жидкости P

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \Gamma_y = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\Gamma_x = uh - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (3.13)$$

Сама функция тока ψ – является скалярной величиной, задающей двумерное течение жидкости.

Далее выражаем производные давления через функцию тока

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{12}{h^3} \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{12\mu}{h^3} \left(uh - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

Выполняем перекрестное дифференцирование

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = 12\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x} = 12\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{h^2} - \frac{1}{h^3} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right).$$

Приравнивая смешанные производные, получаем уравнение на стационарную функцию тока, которое будем называть сопряженным уравнением Рейнольдса

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						20
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{h^3} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{h^3} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{h^2} \right). \quad (3.14)$$

Сопряженная форма уравнения Рейнольдса является более предпочтительной по сравнению с классической при расчете смазочных слоев в случае больших нагрузок и, соответственно, малых толщин h .

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						21
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

4 Вариационный подход к решению задачи

4.1 Вычисление функционала для давления

По аналогии с задачей теплопроводности [7] запишем функционал для давления в следующем виде

$$J_p(P) = \iint [A \operatorname{grad}^2(P) + BP] dx dy. \quad (4.1)$$

Добавляя к давлению малое возмущение (вариацию $P_1 = P + \delta P$), получаем выражение возмущенного функционала

$$J_p(P_1) = \iint [A \operatorname{grad}^2(P + \delta P) + B(P + \delta P)] dx dy.$$

Выполняя преобразования подынтегрального выражения, имеем

$$\begin{aligned} J_p(P_1) &= \iint [A [\operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(\delta P)]^2 + B(P + \delta P)] dx dy = \\ &= \iint [A [\operatorname{grad}^2(P) + 2 \operatorname{grad}(P) \operatorname{grad}(\delta P) + \operatorname{grad}^2(\delta P)] + B(P + \delta P)] dx dy, \end{aligned}$$

$$J_p(P_1) = \iint [A \operatorname{grad}^2(P) + BP] dx dy + \iint [2A \operatorname{grad}(P) \operatorname{grad}(\delta P) + B \delta P] dx dy,$$

$$J_p(P_1) = J_p(P) + \iint [2A \operatorname{grad}(P) \operatorname{grad}(\delta P) + B \delta P] dx dy.$$

Вычитая возмущенное и невозмущенное значения функционала, получаем вариацию

$$\delta J_p(P_1) = \iint [2A \operatorname{grad}(P) \operatorname{grad}(\delta P) + B \delta P] dx dy.$$

Выполняя тождественные преобразования, получаем

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						22
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$\begin{aligned}
2 \iint \left[A \operatorname{grad}(P) \operatorname{grad}(\delta P) \right] dx dy &= 2 \iint \left[A \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta P + A \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta P \right] dx dy = \\
&= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial P}{\partial x} \delta P \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial P}{\partial x} \right) \delta P + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial P}{\partial y} \delta P \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial P}{\partial y} \right) \delta P \right] dx dy = \\
&= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial P}{\partial x} \delta P \right) \right] dx dy - 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial P}{\partial x} \right) \delta P \right] dx dy + \\
&+ 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial P}{\partial y} \delta P \right) \right] dx dy - 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial P}{\partial y} \right) \delta P \right] dx dy.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Предполагая равенство нулю вариаций на границе, имеем

$$A \frac{\partial P}{\partial x} \delta P \Big|_r = 0, \quad A \frac{\partial P}{\partial y} \delta P \Big|_r = 0. \tag{4.3}$$

В силу условий (4.3) последние два интеграла в уравнении (4.2) равны нулю. В результате получаем равенство

$$2 \iint \left[A \operatorname{grad}(P) \operatorname{grad}(\delta P) \right] dx dy = -2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial P}{\partial x} \right) \delta P + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial P}{\partial y} \right) \delta P \right] dx dy.$$

В итоге находим линейную связь между вариацией функционала и произвольным возмущением давления

$$\delta J_P(P_1) = \iint \delta P \left(-2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) + B \right) dx dy = 0.$$

Из условия равенства нулю вариации функционала приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right) = B. \tag{4.4}$$

Сравнивая уравнения (3.12) и (4.4), находим коэффициенты А и В для функционала

$$A = \frac{h^3}{24\mu}; \quad (4.5a)$$

$$B = \frac{\partial u h}{\partial x}; \quad (4.5б)$$

Подставляя коэффициенты (4.5a) и (4.5б) в функционал (4.1), получаем

$$J_p(P) = \iint \left[\frac{h^3}{24\mu} grad^2(P) + \frac{\partial u h}{\partial x} P \right] dx dy. \quad (4.6)$$

4.2 Вычисление функционала для функции тока

Теперь запишем функционал для функции тока ψ и найдем коэффициенты А, В

$$J_\psi(\psi) = \iint [C grad^2(\psi) + E\psi] dx dy. \quad (4.7)$$

Проводим аналогичные действия, как в параграфе 4.1. Добавляя функционалу для функции тока вариацию $\psi_1 = \psi + \delta\psi$, получаем возмущенный функционал

$$J_\psi(\psi_1) = \iint [C grad^2(\psi + \delta\psi) + E(\psi + \delta\psi)] dx dy,$$

Выполняя преобразования подынтегрального выражения, имеем

$$\begin{aligned} J_\psi(\psi_1) &= \iint [C [grad(\psi) + grad(\delta\psi)]^2 + E(\psi + \delta\psi)] dx dy = \\ &= \iint [C [grad^2(\psi) + 2 grad(\psi) grad(\delta\psi) + grad^2(\delta\psi)] + E(\psi + \delta\psi)] dx dy, \end{aligned}$$

$$J_{\psi}(\psi_1) = \iint [C \text{grad}^2(\psi) + E\psi] dx dy + \iint [2C \text{grad}(\psi) \text{grad}(\delta\psi) + E\delta\psi] dx dy,$$

$$J_{\psi}(\psi_1) = J_{\psi}(\psi) + \iint [2C \text{grad}(\psi) \text{grad}(\delta\psi) + E\delta\psi] dx dy.$$

Вычитая возмущенное и невозмущенное значения функционала, получаем вариацию

$$\delta J_{\psi}(\psi) = \iint [2C \text{grad}(\psi) \text{grad}(\delta\psi) + E\delta\psi] dx dy.$$

Выполняя тождественные преобразования, получаем

$$\delta J_{\psi}(\psi_1) = 2 \iint [C \text{grad}(\psi) \text{grad}(\delta\psi)] dx dy + \iint [E\delta\psi] dx dy,$$

$$\begin{aligned} 2 \iint [C \text{grad}(\psi) \text{grad}(\delta\psi)] dx dy &= 2 \iint \left[C \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta\psi + C \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta\psi \right] dx dy = \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta\psi \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta\psi + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta\psi \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \delta\psi \right] dx dy = \\ &= 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta\psi \right) \right] dx dy - 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta\psi \right] dx dy + \\ &+ 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta\psi \right) \right] dx dy - 2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \delta\psi \right] dx dy. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Предполагая равенство нулю вариаций на границе, имеем

$$C \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta\psi \Big|_{\Gamma} = 0; \quad C \frac{\partial \psi}{\partial y} \delta\psi \Big|_{\Gamma} = 0. \quad (4.9)$$

В силу условий (4.9) последние два интеграла в уравнении (4.8) равны нулю. В результате получаем равенство

$$2 \iint [C \text{grad}(\psi) \text{grad}(\delta\psi)] dx dy = -2 \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \delta\psi + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \delta\psi \right] dx dy;$$

В итоге находим линейную связь между вариацией функционала и произвольным возмущением давления

$$\delta J_{\psi}(\psi) = \iint \delta\psi \left(-2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right) + E \right) dx dy = 0.$$

Из условия равенства нулю вариации функционала приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \frac{E}{2}. \quad (4.10)$$

Сравниваем уравнения (3.14) и (4.10), находим коэффициенты C и E

$$C = \frac{1}{2h^3}, \quad (4.11a)$$

$$E = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{h^2} \right). \quad (4.11b)$$

Подставляя коэффициенты (4.11a) и (4.11b) в функционал (4.7), получаем

$$J_{\psi}(\psi) = \iint \left[\frac{1}{2h^3} \text{grad}^2(\psi) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{h^2} \right) \psi \right] dx dy. \quad (4.12)$$

Докажем, что выражения (4.6) и (4.12) принимают минимальные значения, если ψ удовлетворяют стационарному уравнению Рейнольдса.

4.3 Решение стационарного уравнения Рейнольдса

Далее проведем следующие действия для приведения доказательств вышесказанного условия. Предположим, что в стационарном состоянии J_p^*

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						26
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

примет минимальное значение для некоторого распределения давления P^* , тогда записываем уравнение (4.6) в форме

$$J_p^*(P^*) = \iint \left[\frac{h^3}{24\mu} \nabla^2 P^* + P^* \operatorname{div}(h\vec{u}) \right] dx dy. \quad (4.13)$$

Производим тождественные преобразования

$$\iint P^* \operatorname{div}(h\vec{u}) dx dy = \iint \left\{ \operatorname{div}(P^* h\vec{u}) - h\vec{u} \nabla P^* \right\} dx dy,$$

где $\operatorname{div}(P^* h\vec{u}) = 0$, согласно

$$\iint \left[\operatorname{div}(P^* h\vec{u}) \right] dx dy = \oint P^* h\vec{u} dS = 0.$$

Получаем функционал давления P^* в измененном виде

$$J_p(P^*) = \iint \left[\frac{h^3}{24\mu} \nabla^2 P^* - h\vec{u} \nabla P^* \right] dx dy. \quad (4.14)$$

Запишем уравнение потока масс $\vec{\Gamma}$

$$\vec{\Gamma} = h\vec{u} - \frac{h^3}{12\mu} \vec{\nabla} P^*. \quad (4.15)$$

Подставляем уравнение (4.15) в (4.14) и получаем

$$J_p^*(P^*) = \iint \left[\frac{h^3}{24\mu} \nabla^2 P^* - \vec{\Gamma} \nabla P^* - \frac{h^3}{12\mu} \nabla^2 P^* \right] dx dy = \iint \left[-\frac{h^3}{24\mu} \nabla^2 P^* - \vec{\Gamma} \nabla P^* \right] dx dy. \quad (4.16)$$

Вводим тождественные преобразования, где

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		27

$$\iint [\vec{\Gamma} \nabla P^*] dxdy = \iint [div(\vec{\Gamma} P^*) - P^* div(\vec{\Gamma})] dxdy.$$

В вышеуказанном выражении $div(\vec{\Gamma}) = 0$ согласно закону сохранения масс. Также воспользуемся теоремой Гаусса

$$\iint [div(\vec{F})] dxdy = \oint \vec{F} \vec{N} dS. \quad (4.17)$$

В результате получим следующее выражение

$$\iint [\vec{\Gamma} \nabla P^*] dxdy = \iint [P^* div(\vec{\Gamma})] dxdy = \oint \vec{\Gamma} P^* dS = 0.$$

С учетом вышеприведенных преобразований получим выражение для функционала давления J_p^*

$$J_p^* = - \iint \left[\frac{h^3}{24\mu} \nabla^2 P^* \right] dxdy. \quad (4.18)$$

Из условия, что J_p^* представляет собой минимальное значение функционала, следует неравенство

$$J_p \geq J_p^* = - \iint \left[\frac{h^3}{24\mu} \nabla^2 P^* \right] dxdy. \quad (4.19)$$

Из (4.19) в частности следует, что минимальное значение функционала всегда отрицательно.

Далее выясним связь вышеприведенных функционалов с мощностью диссипации энергии в смазочном слое.

4.4 Мощность диссипации энергии и его связь

Находим интегральное выделение тепла (2.7) в слое по следующей формулировке, учитывая граничные условия

$$Q = \iiint \mu \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial n} \right)^2 \right] dx dy dn. \quad (4.20)$$

Дифференцируем уравнения (3.5а) и (3.5б) по нормали n

$$\frac{\partial u_x}{\partial n} = \frac{n}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{h}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{h} u_{1x}, \quad (4.21a)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial n} = \frac{n}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{h}{2\mu} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{h} u_{1y}. \quad (4.21б)$$

Для того, чтобы привести к уравнению (4.20) возводим в квадрат (4.21а) и (4.22б)

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial n} \right)^2 = \frac{1}{\mu^2} \left(n - \frac{h}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{u_{1x}^2}{h^2} + \frac{u_{1x}}{\mu} \left(\frac{2n}{h} - 1 \right) \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (4.22a)$$

$$\left(\frac{\partial u_y}{\partial n} \right)^2 = \frac{1}{\mu^2} \left(n - \frac{h}{2} \right)^2 \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \frac{u_{1y}^2}{h^2} + \frac{u_{1y}}{\mu} \left(\frac{2n}{h} - 1 \right) \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4.22б)$$

Просуммируем уравнения (4.22а) и (4.22б)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_x}{\partial n} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial n} \right)^2 &= \frac{1}{\mu^2} \left(n - \frac{h}{2} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{(u_{1x}^2 + u_{1y}^2)}{h^2} + \\ &+ \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial P}{\partial x} u_{1x} + \frac{\partial P}{\partial y} u_{1y} \right] \left(\frac{2n}{h} - 1 \right), \end{aligned} \quad (4.23)$$

т.к. слои смазки не смешиваются, то $u_{1y} = 0$

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial n}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2} \left(n - \frac{h}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{u_{1x}^2}{h^2} + \frac{u_{1x}}{\mu} \left(\frac{2n}{h} - 1\right) \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (4.24)$$

Интегрируем по нормали n

$$\int_0^h \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial n}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial n}\right)^2\right] dn = \frac{h^3}{12\mu^2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{u_{1x}^2}{h}. \quad (4.25)$$

Вставляем в первоначальное уравнение (4.20) интегральную сумму (6.25), получим

$$Q(P) = \iint \left[\frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right] + \mu \frac{u_{1x}^2}{h} \right] dx dy. \quad (4.26)$$

Выражение диссипации энергии имеет смысл мощности вязких сил, которая в свою очередь равна произведению момента трения на угловую скорость вращения вала

$$Q = M_{tr} \omega \quad (4.27)$$

Сравнивая выражения (4.26) и (4.19), получаем соотношение между диссипацией и минимизируемым функционалом

$$Q(P) = \iint \left[\mu \frac{u_{1x}^2}{h} \right] dx dy - J_p^* \geq \iint \left[\mu \frac{u_{1x}^2}{h} \right] dx dy - J_p \quad (4.28)$$

Используя уравнения (4.28) и (4.27), получаем уравнение связи функционала с моментом трения

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						30
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$M_{tr}\omega \geq \iint \left[\mu \frac{u_{1x}^2}{h} \right] dx dy - J_p \quad (4.29)$$

Данное уравнение позволяет получать строгие априорные оценки снизу момента трения.

4.5 Минимизация функционала методом конечных элементов

Расчетная область для подшипника скольжения представляет собой прямоугольник, показанный на рисунке 4.1. Этот прямоугольник является результатом представления подшипника элементарными ячейками в развернутом (плоском) виде.

Координата y - вдоль оси подшипника, координата x - вдоль азимутального угла.

Вводим прямоугольную сетку. Каждый элементарный прямоугольник разбивается на треугольники, в пределах которых давление предполагается линейной функцией, а его градиент является постоянным вектором.

Исходный функционал расписываем как сумму интегралов по элементарным ячейкам. В результате приходим к задаче минимизации функции многих переменных, зависящей от значений давления в узлах расчетной сетки.

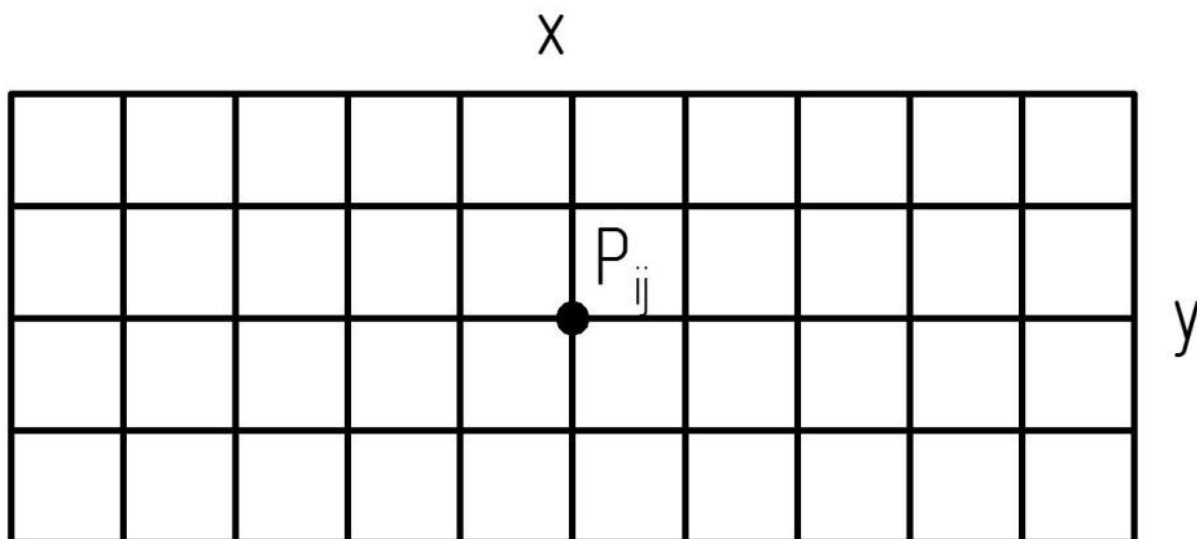


Рисунок 4.1 – Численная схема

Поиск минимума функционала осуществляем градиентным методом наискорейшего спуска, реализованным на языке программирования FORTRAN.

При проведении расчетов использовалась сетка размерностью 100x160.

В процессе итераций функционал монотонно убывает. Зависимость функционалов от порядкового номера итерации представлена на рисунках 6.7 и 6.8.

Видно, функционал существенно уменьшается за первые 1300 шагов итерации и далее остается практически постоянным.

В результате минимизации функционала в программе FORTRAN были найдены значения давления в узлах расчетной сетки. Дальнейшая обработка численных результатов выполнялась с помощью пакета Mathcad.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						32
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

5 Подготовка к расчетам в программе Mathcad

Далее в программе Mathcad вводим данные. Разбиваем нашу модель на конечные элементы, в сумме представляющие двумерную матрицу. Координату y , как длину подшипника L разбиваем на массив из 161 точки. Декартову координату x заменяем на полярную φ , угловую скорость ω умноженную на радиус внутренней стенки вкладыша R_1 , длиной дуги, разбитой на 100 точек. Для численного расчета функционалов (4.6) и (4.12), произведем следующие действия.

Для удобства счисления воспользуемся следующими нормировками

$$\begin{aligned} P &= \tilde{P} \frac{6\mu R_1^2 \omega}{D^2} & u &= \frac{\omega R_1}{2} & h &= HD, \\ y &= R_1 z & x &= R_1 \varphi \end{aligned} \quad (5.1)$$

где \tilde{P} - безразмерное давление; μ - вязкость; $D = R_1 - R_0$ - зазор; R_0 - внешний радиус вала; R_1 - внутренний радиус вкладыша; ω - угловая скорость; H - безразмерная толщина смазочного слоя; z - безразмерная координата вдоль нормали; φ - полярная координата.

Ввод массива чисел

$$i = 0..99 \quad k = 0..160.$$

Вычисление значения угла φ

$$\varphi_i = -0.25\pi + 0.01 \cdot 2\pi i. \quad (5.2)$$

Вычисление значения расстояния z

$$z_k = -1 + k \frac{2}{160}. \quad (5.3)$$

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		33

Далее будем численно дифференцировать давление P , толщину смазочного слоя H для нахождения функционалов в будущем.

5.1 Численное дифференцирование для функционала давления

Функции P и H задаются в дискретном (матричном) виде, для поиска первых производных воспользуемся методом двусторонней разности, а для вычисления на нижних и верхних границах - левосторонним и правосторонним методами, соответственно.

Вычисление первых производных давления \tilde{P} по направлениям

$$j = 1..98 \quad k = 1..159,$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right)_{j,k} = \frac{\tilde{P}_{j+1,k} - \tilde{P}_{j-1,k}}{2 \cdot 2\pi} 100, \quad (5.4a)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \right)_{j,k} = \frac{\tilde{P}_{j,k+1} - \tilde{P}_{j,k-1}}{2 \cdot 2} 160, \quad (5.4б)$$

$$j = 0..99,$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right)_{0,k} = \frac{\tilde{P}_{1,k} - \tilde{P}_{0,k}}{2\pi} 100, \quad (5.4в)$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right)_{99,k} = \frac{\tilde{P}_{99,k} - \tilde{P}_{98,k}}{2\pi} 100, \quad (5.5г)$$

$$k = 0..160,$$

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \right)_{j,0} = \frac{\tilde{P}_{j,1} - \tilde{P}_{j,0}}{2} 160, \quad (5.5д)$$

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						34
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}\right)_{j,160} = \frac{\tilde{P}_{j,160} - \tilde{P}_{j,159}}{2} 160, \quad (7.5e)$$

Вычисление суммы квадратов производной давления \tilde{P}

$$grad^2(\tilde{P}) = \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}\right)^2. \quad (5.6)$$

Используя нормировку (5.1), запишем выражение толщины смазочного слоя(3.8) в безразмерном виде H

$$H(\varphi) = 1 + \tilde{\eta} \cos(\varphi) + \tilde{d}(\tilde{P}), \quad (5.7)$$

где $\tilde{\eta}$ - относительный эксцентриситет; \tilde{d} - безразмерный прогиб вкладыша.

Т.к. условились, что прогиб мы не учитываем, формула (5.7) примет следующий вид

$$H(\varphi) = 1 + \tilde{\eta} \cos(\varphi). \quad (5.8)$$

Вычисление первой производной толщины смазочного слоя по углу φ

$$j = 1..98 \quad k = 1..159,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)_{j,k} = \frac{H_{j+1,k} - H_{j-1,k}}{2 \cdot 2\pi} 100, \quad (5.9a)$$

$$j = 0..99,$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)_{0,k} = \frac{H_{1,k} - H_{0,k}}{2\pi} 100, \quad (5.9b)$$

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						35
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right)_{99,k} = \frac{H_{99,k} - H_{98,k}}{2\pi} 100. \quad (5.9в)$$

Определяем шаги по углу φ и расстоянию z .

$$d\varphi = \varphi_1 - \varphi_0, \quad dz = z_1 - z_0. \quad (5.10)$$

Обезразмериваем функционал (4.6) по нормировкам (5.1)

$$\begin{aligned} J_P(P) &= \iint \left[\frac{h^3}{24\mu} \text{grad}^2(P) + \frac{\partial U h}{\partial x} P \right] dx dy = \\ &= \iint \left[\frac{H^3 D^3 \cdot 72 \mu^2 R_1^4 \omega^2}{24 \mu D^4 R_1^2} \text{grad}^2(\tilde{P}) + \frac{6 \omega^2 R_1^3 D \mu}{2 R_1 D^2} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \tilde{P} \right] R_1^2 d\varphi dz. \end{aligned}$$

Получаем

$$J_P(P) = \frac{3 \mu R_1^4 \omega^2}{D} \tilde{J}_P(\tilde{P}) \quad (5.11)$$

$$\tilde{J}_P(\tilde{P}) = \iint \left[\frac{H^3}{2} \text{grad}^2(\tilde{P}) + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \tilde{P} \right] d\varphi dz \quad (5.12)$$

5.2 Численное дифференцирование функционала для функции тока

Применяем вышеприведенные методы для расчета следующих выражений. Вычисляем первую производную от $\frac{1}{H^2}$ по расстоянию z

$$j = 1..98 \quad k = 1..159,$$

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						36
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{H^2} \right] \right)_{j,k} = \frac{\frac{1}{H_{j,k+1}^2} - \frac{1}{H_{j,k-1}^2}}{2 \cdot 2} 160, \quad (5.13a)$$

$$k = 0..160,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{H^2} \right] \right)_{j,0} = \frac{\frac{1}{H_{j,1}^2} - \frac{1}{H_{j,0}^2}}{2} 160, \quad (5.13б)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{H^2} \right] \right)_{j,160} = \frac{\frac{1}{H_{j,160}^2} - \frac{1}{H_{j,159}^2}}{2} 160. \quad (5.13в)$$

Определение производной функции тока $\tilde{\psi}$ по направлениям (3.13),
вводим нормировку

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{H^3 D^3}{12\mu} \frac{6\mu R_1^2 \omega}{d^2 R_1} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = \frac{R_1 D \omega}{2} H^3 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = U h - \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{R_1 D \omega}{2} H - \frac{H^3 D^3}{12\mu} \frac{6\mu R_1^2 \omega}{d^2 R_1} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} = \frac{R_1 D \omega}{2} \left(H - H^3 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right).$$

Вычисление суммы квадратов производной функции тока $\tilde{\psi}$

$$grad(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2.$$

Теперь определим функцию тока ψ в чистом виде и обезразмериваем

$$\begin{aligned} \psi &= \int_0^y \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy = \int_0^y \left(\frac{R_1 D \omega}{2} H - \frac{H^3 D^3}{12\mu} \frac{6\mu R_1^2 \omega}{D^2 R_1} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right) R_1 dz = \\ &= \frac{R_1^2 D \omega}{2} \int_0^y \left(H - H^3 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right) dz, \end{aligned}$$

$$\psi(x, y) = \frac{R_1 D \omega}{2} \tilde{\psi}(\varphi, z). \quad (5.14)$$

В конечном итоге получим

$$\tilde{\psi}(\varphi, \tilde{y}) = \int_0^{\tilde{y}} \left(H - H^3 \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right) d\tilde{y} \quad (5.15)$$

Обезразмериваем функционал от ψ (4.12) по нормировкам (5.1)

$$\begin{aligned} J_\psi(\psi) &= \iint \left[\frac{1}{h^3} \text{grad}^2(\tilde{P}) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{U}{h^2} \right) \psi \right] dx dy = \\ &= \iint \left[\left[\frac{R_1^2 D^2 \omega^2}{4 H^3 D^3} \text{grad}^2(\tilde{P}) + \frac{2 R_1^3 D \omega^2}{4 R_1 D^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H^2} \right) \tilde{\psi} \right] R_1^2 d\varphi dz \right] \end{aligned}$$

Получаем

$$J_\psi(\psi) = \frac{R_1^4 \omega^2}{2D} \tilde{J}_\psi(\tilde{\psi}), \quad (5.16)$$

$$\tilde{J}_\psi(\tilde{\psi}) = \iint \left[\frac{1}{2H^3} \text{grad}^2(\tilde{\psi}) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{H^2} \right) \tilde{\psi} \right] d\varphi dz. \quad (5.17)$$

Обезразмериваем интегральную сумму мощности диссипации энергии

$$\begin{aligned} Q(P) &= \iint \left[\frac{h^3}{12\mu} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \frac{u_{1x}^2}{h} \right] dx dy = \\ &= \iint \left[\frac{36 H^3 D^3 \mu^2 R_1^4 \omega^2}{12 \mu D^4 R_1^2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\mu \omega^2 R_1^2}{4} \frac{1}{H} \right] R_1^2 d\varphi dz, \end{aligned}$$

$$Q(P) = \frac{\mu R_1^4 \omega^2}{D} \tilde{Q}(\tilde{P}), \quad (5.18)$$

$$\tilde{Q}(\tilde{P}) = \iint \left[3H^3 \left[\left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{4H} \right] d\varphi dz. \quad (5.19)$$

В текущей главе были подготовлены функционалы и выражения для вычисления в вычислительном пакете MathCad. Безразмерная форма записи позволяет приближенно определить распределение давления, толщин и вышеприведенных характеристик для любых заданных условий и нагрузок. Достаточно обратно ввести размерность, например: (5.18), чтобы учесть размеры, форму, частоту вращения вала, вязкость смазочной жидкости и прочих важных триботехнических характеристик узлов трения.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						39
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

6 Расчеты и графическая интерпретация

Приступим к построению графиков функций. Для этого проведем расчеты в программе, которая будет выдавать значения давления P в дискретном виде, несущую способность W , компоненты найдем по формуле

$$W_x = \iint P \cos(\varphi) dx dy \quad (6.1a)$$

$$W_y = \iint P \sin(\varphi) dx dy \quad (6.1б)$$

Произведем следующие действия и получим W

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad (6.2)$$

В программе будем изменять число итераций n в диапазоне от 500 до 6000, а также относительный эксцентриситет $\tilde{\eta}$ в пределах от 0.2 до 0.9. Получим серию расчетов. Найдем значения функционалов J_p и J_ψ , момента сил вязкого трения M_{lr} и интегрального тепловыделения Q .

Используя полученные значения, начинаем приводить в матричный вид и строить зависимости, интерпретированные ниже.

На рисунке 6.1 отображено распределение давления в смазочном слое при относительном эксцентриситете $\tilde{\eta} = 0.6$. Начало расчета взято в точке введения масла и отклоняется на -0.25π радиан от вертикальной оси, которую можно увидеть на рисунке 3.1. Представим, что вся длина подшипника вдоль координаты z равна L . Как мы видим из графика, максимальное давление приходится на угол 150° и начинает снижаться по мере приближения к точке введения масла.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						40
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

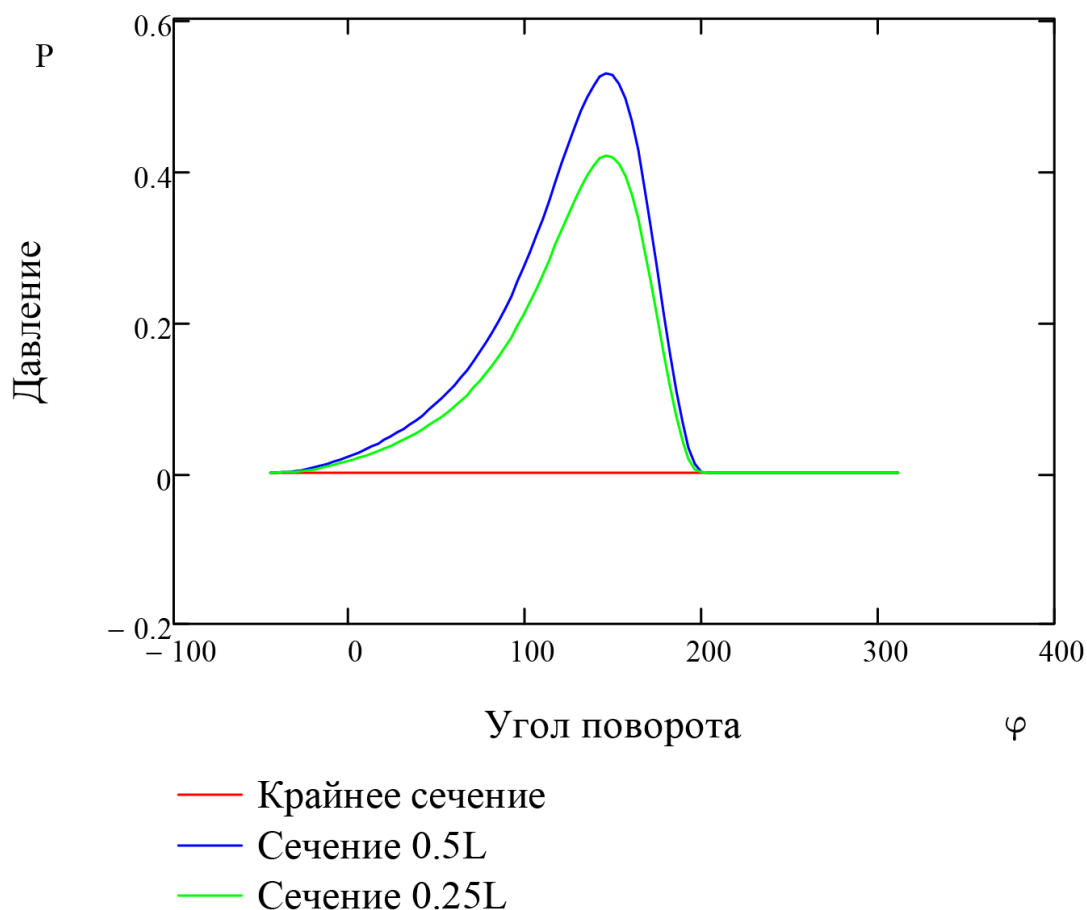


Рисунок 6.1 –График распределения давления по углу поворота, при $\tilde{\eta} = 0.6$

Далее график, который отображает распределение давления относительно линейной координаты, рисунок 6.2. Из графика понятно, что на крайних сечениях подшипника при любых углах поворота давление отсутствует. Об этом говорилось в тексте ранее. По мере приближения к центральному сечению 0, которое соответствует $0.5L$, наблюдается экстремальное давление.

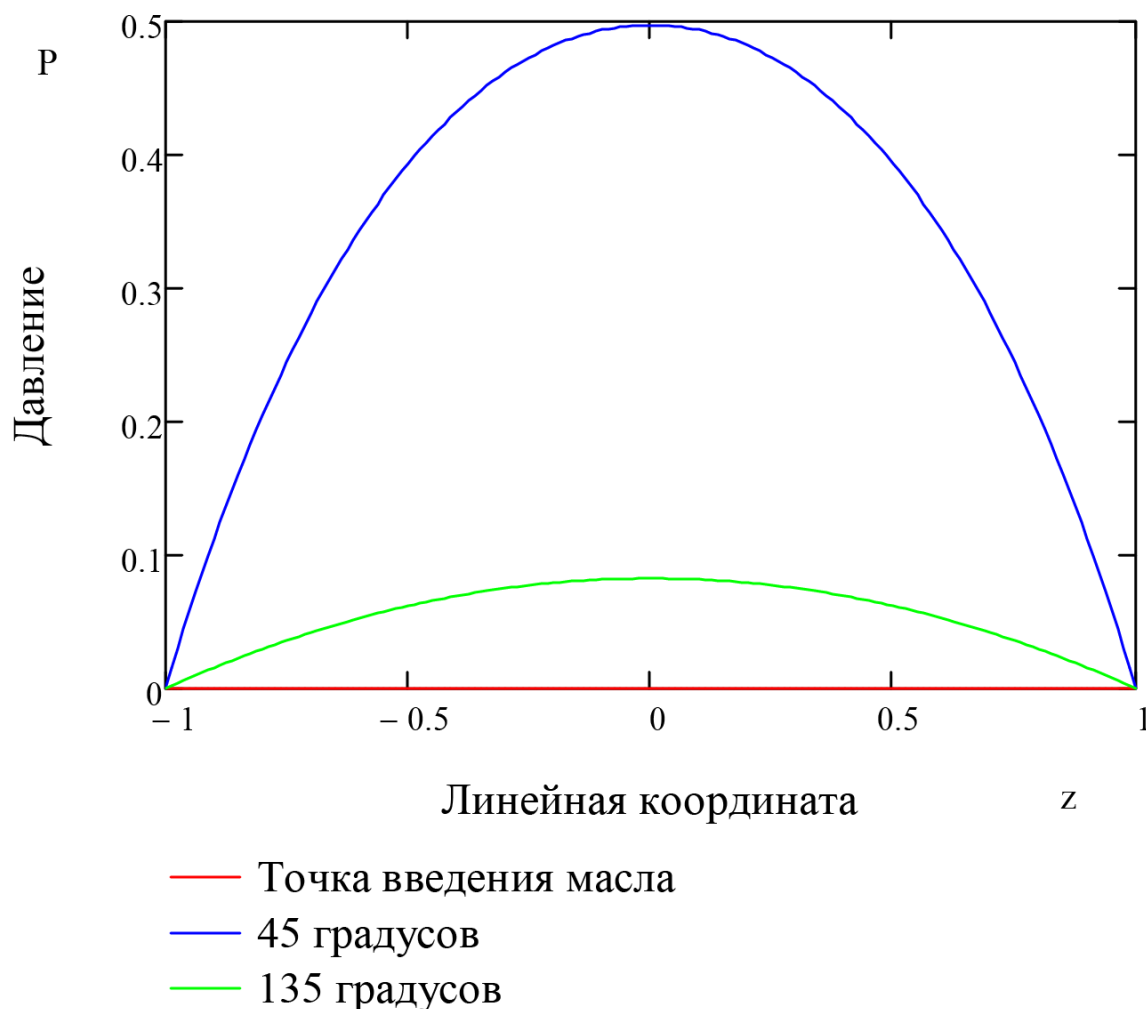


Рисунок 6.2 – График распределения давления по линейной координате, при $\tilde{\eta} = 0.6$

На рисунках 6.3 и 6.4 показаны зависимости выделения тепловой энергии от угла φ и расстояния z при относительном смещении вала $\eta = 0.6$. Т.к. функция Q зависит от двух переменных, один аргумент берется как константа, по второй строится график.

Из рисунка 6.3 видно, что максимальное выделение тепла приходится в точке около 110° . Функция носит знакопеременный переменный характер в первой производной по линейной координате, приближенных к краям сечения подшипника.

Исходя из рисунка 6.4, следует отметить, что максимальное тепловыделение, приходится на центральное сечение.

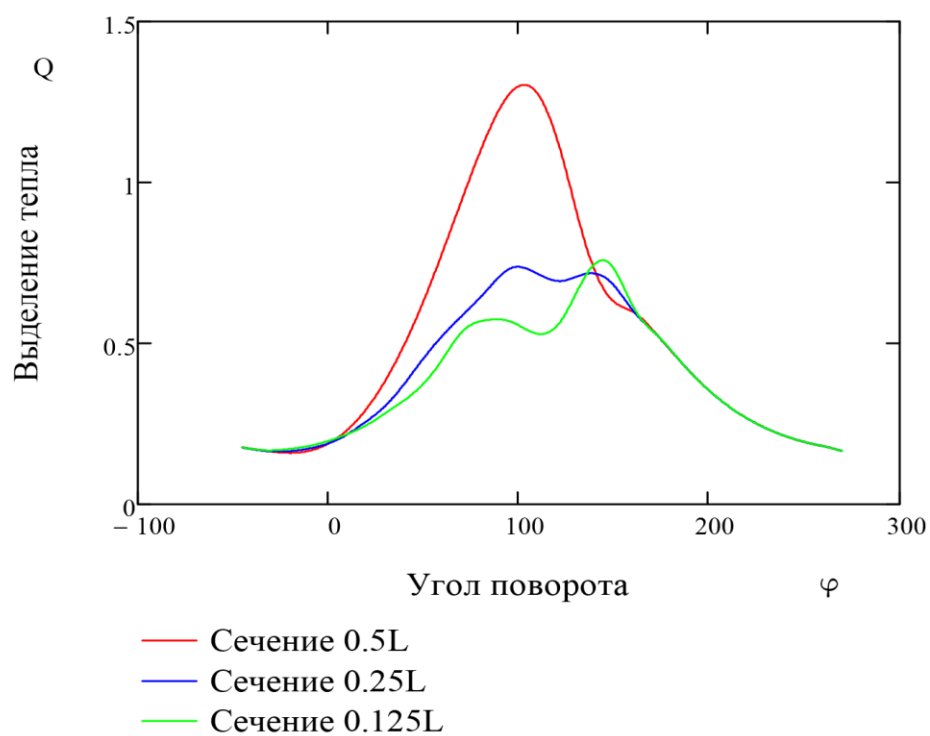


Рисунок 6.3—График распределения мощности тепловыделения по углу поворота, при $\tilde{\eta} = 0.6$

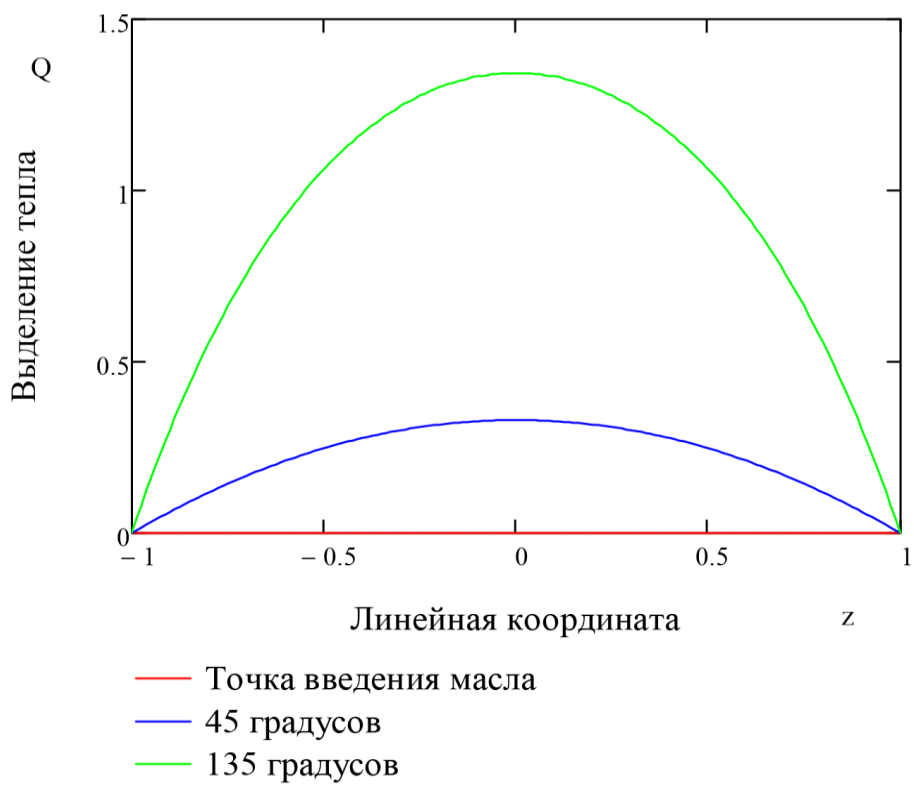


Рисунок 6.4 – График распределения мощности тепловыделения по линейной координате, при $\tilde{\eta} = 0.6$

Переходим к результатам расчетов, основанных на изменении относительного смещения вала $\tilde{\eta}$.

Несущая способность – это максимальное напряжение, которое может выдержать подшипник, не разрушаясь. Рисунок 6.5 показывает, как изменяется несущая способность подшипника от относительного уменьшения зазора между валом и вкладышем. Она растет пропорционально и при стремлении к 1 подвергается колоссальным нагрузкам. Помимо этого, несущая способность зависит от вязкости масла, скоростью вращения вала. Однако это непосредственно связано с увеличением момента вязких сил трения (рисунок 6.6), что влечет за собой рост тепловыделения, что создает необходимость применять дополнительные способы охлаждения масла.

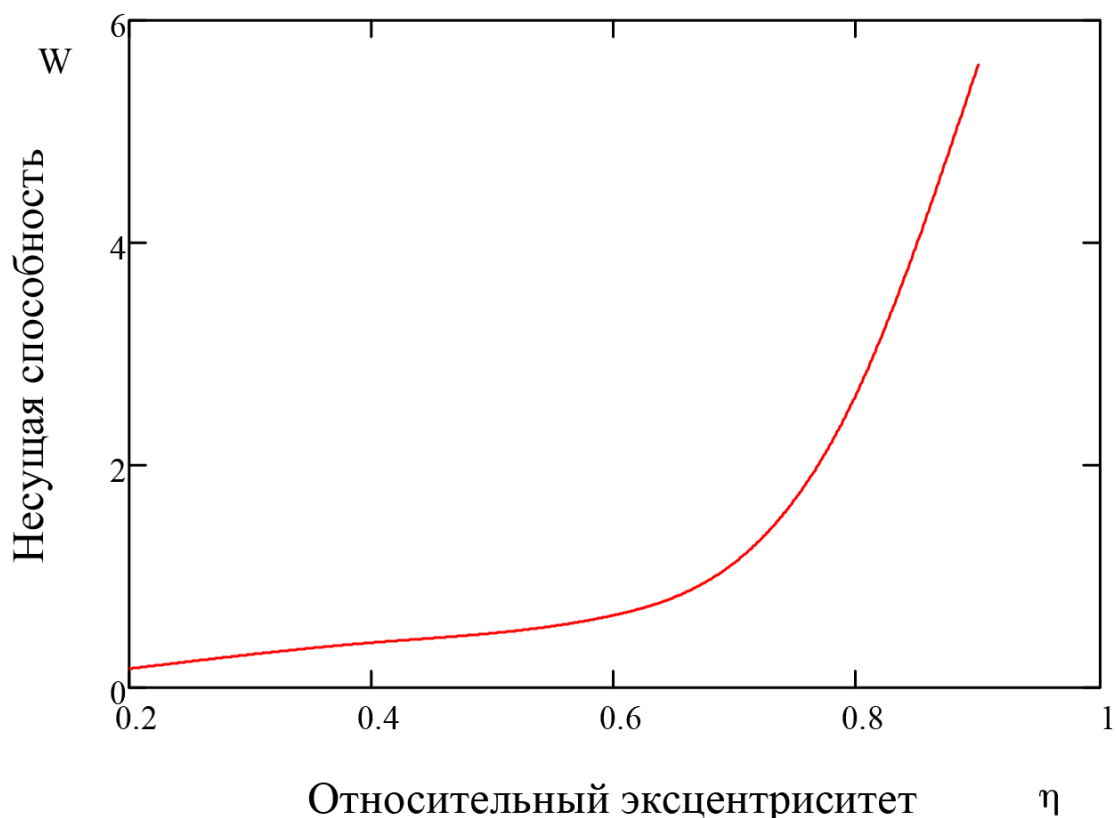


Рисунок 6.5–График нагружения

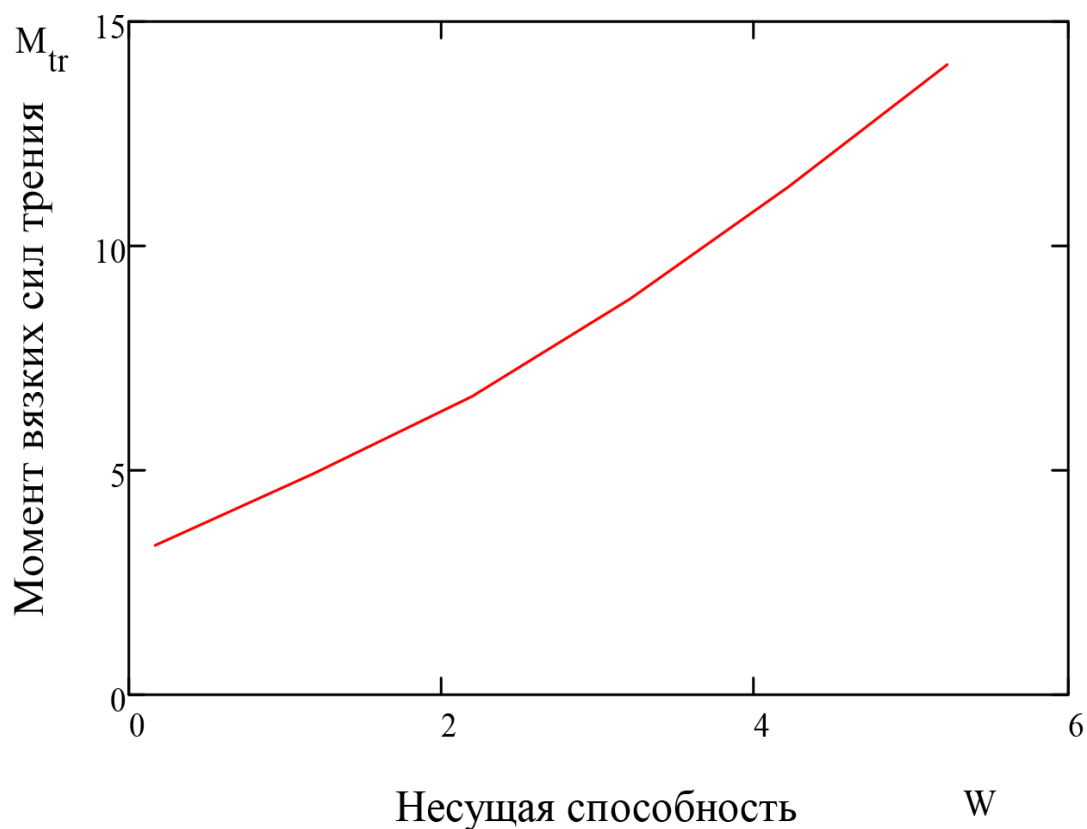


Рисунок 6.6—График зависимости момента трения от несущей способности

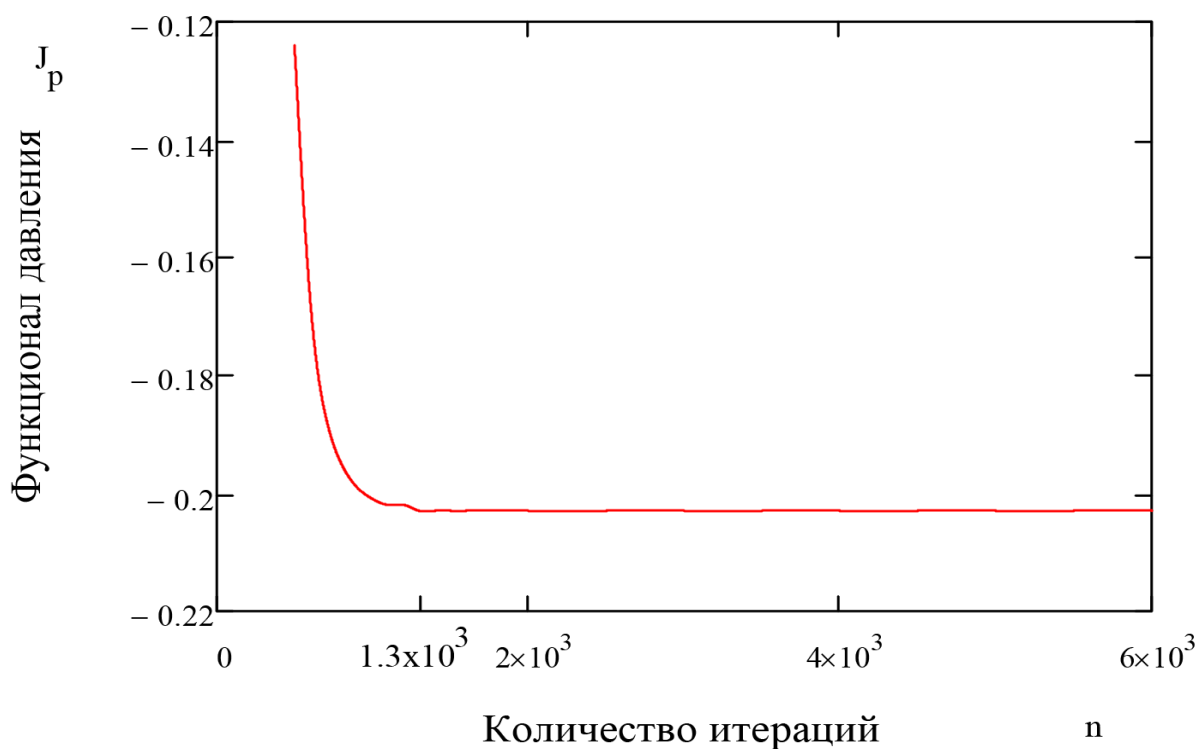


Рисунок 6.7—Значение функционала давления от порядкового номера итераций, при $\tilde{\eta} = 0.6$

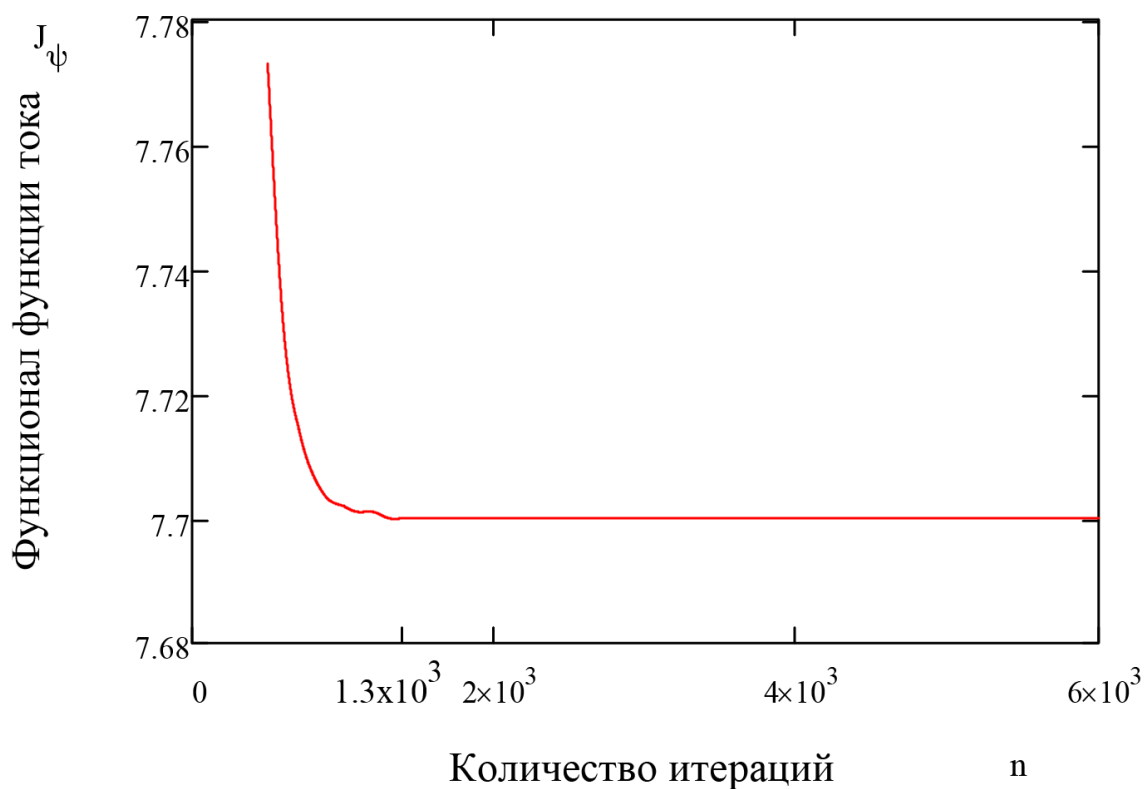


Рисунок 6.8 - График зависимости функционала для функции тока от порядкового номера итераций, при $\tilde{\eta} = 0.6$

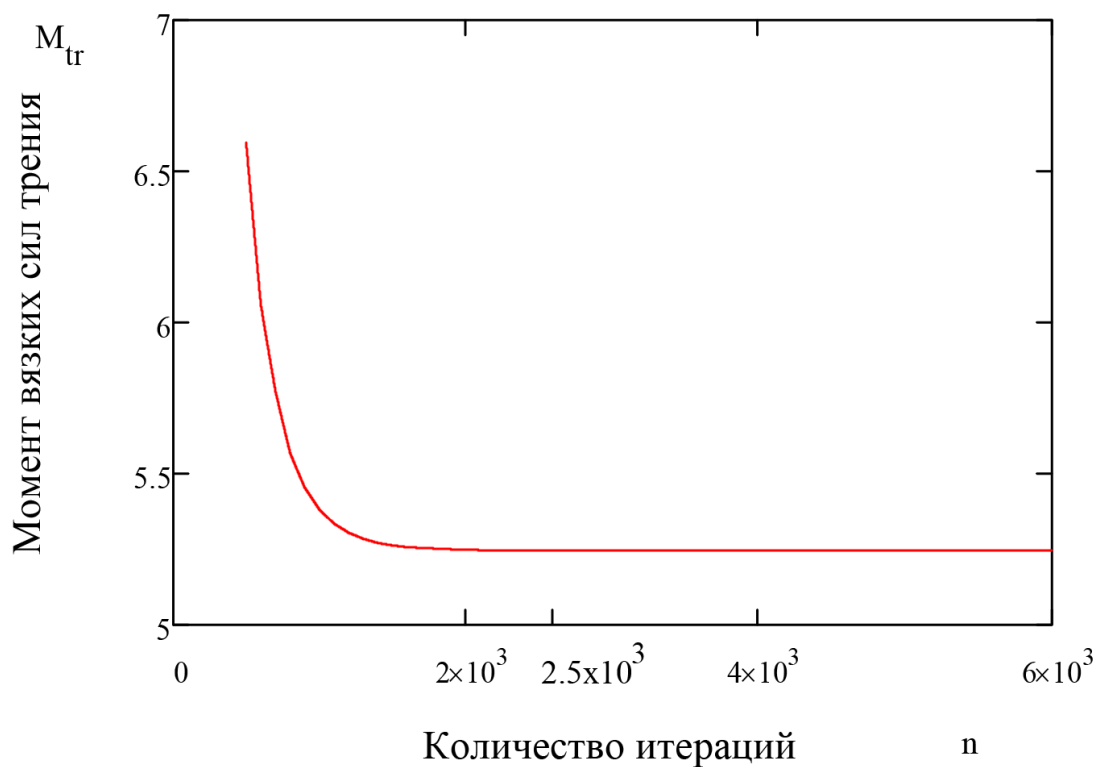


Рисунок 6.9—График зависимости момента сил трения от порядкового номера итераций, при $\tilde{\eta} = 0.6$

Функция тока ψ , задаваемая формулами (3.13), как скалярная величина, может охарактеризоваться изолиниями, иначе называемыми линиями тока. Сама функция тока ψ , не столь важна как ее первые производные по направлениям (потенциалы). Она физически задает расход жидкости, касательные линиям тока которые совпадают по направлениям компонент векторов скорости течения жидкости. Чем больше линий тока в каждом определенном сечении, тем больше расход жидкости. В случае нашего эксперимента слои жидкой смазки не смешивались и поэтому первая производная функции тока существует только в направлении угла поворота φ (рисунок 6.10).

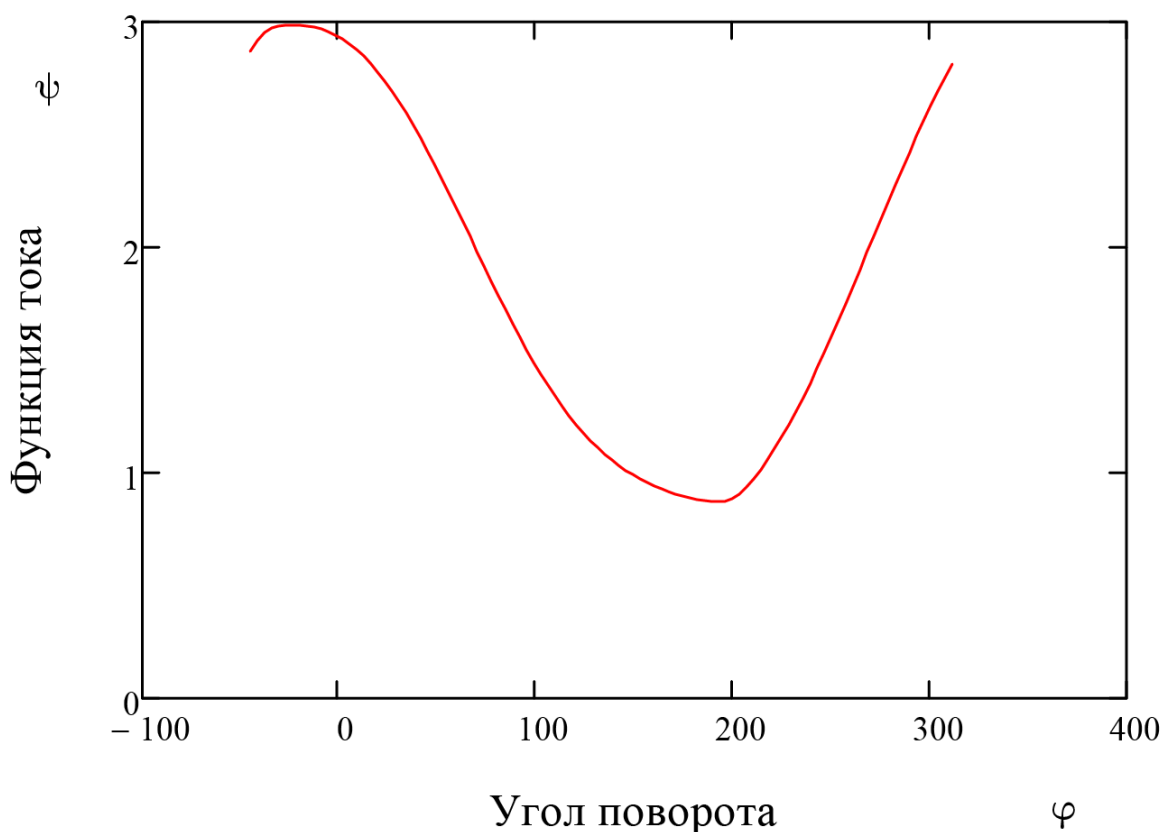


Рисунок 6.10 – График зависимости функции тока от угла поворота, при $\tilde{\eta} = 0.6$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан вариационный метод применительно к теории смазки, позволяющий свести задачу о распределении давления в смазочном слое к задаче минимизации положительно определенного энергетического функционала, связанного с мощностью вязкой диссипации в слое.

Данный подход использовался для построения эффективного численного алгоритма расчета давления в подшипнике скольжения. Алгоритм основан на методе наискорейшего спуска и минимизирующего функционал энергии. Построена зависимость функционалов от порядкового номера итераций, согласно которой функционал выходит на минимальное значение за 1300 шагов итераций.

На основе связи функционала с мощностью диссипации получена формула для гарантированной оценки момента сил трения. В результате расчетов найдены основные характеристики подшипника скольжения для различных нагрузок.

Получена сопряженная форма уравнения Рейнольдса относительно функции тока, которая является более предпочтительной при больших нагрузках и, соответственно, малых толщинах смазочного слоя. Для данного уравнения получен сопряженный энергетический функционал, минимизация которого осуществлялась также методом наискорейшего спуска.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						48
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		

Список использованных источников

1. Бердичевский В.Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В.Л. Бердичевский. - Москва: Издательство «Наука», 1983г. - 448 с.
2. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена / М. Био. - Москва: Издательство «Энергия», 1975г. - 210 с.
3. Боуден Ф.П. Трение и смазка твердых тел / Ф.П. Боуден, Д. Тейлор. - Москва: Издательство «Машиностроение», 1968г. - 543 с.
4. Вагнер В.Ф. О некоторых критериях граничной смазки / В.Ф. Вагнер, Б.И. Ковальский, В.Ф. Терентьев. – Вестник Красноярского государственного технического университета, 1998г. Вып. 11. – С. 19-23.
5. Гиббс Дж.В. Термодинамика. Статистическая механика / Дж.В. Гиббс. - Москва: Издательство «Наука» - Серия «Классики науки, 1982 г. - 584 с.
6. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / П. Гленсдорф, Пригожин И.Р. - Москва: Издательство «Мир», 1973 г. – 280 с.
7. Де Гроот С. Р. Термодинамика необратимых процессов / С.Р. Де Гроот. - Москва: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1956 г. - 280 с.
8. Дьярмати И. Неравновесная динамика: теория поля и вариационные принципы / И. Дьярмати. –Москва: Издательство «Мир», 1974 г. - 303 с.
9. Евдокимов В.Д. Применение новых смазочных материалов для повышения износостойкости деталей машин / В.Д. Евдокимов, В.Л. Левинский. - Москва: Издательство «Машиностроение», 1987г. - 304 с.
10. Иванов В.А. Анализ упругих деформаций в подшипнике скольжения / В.А. Иванов, Еркаев Н.В. - Сибирский Федеральный Университет, Красноярск, 1974 г. - 241-245 с.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		49

11. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. - Москва: Издательство «Наука», 1964 г. - Т.V. Статистическая физика. - 568 с.
12. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Издательство «Наука», 1988 г. - Т.VI. Гидродинамика - 736 с.
13. Ландау Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Издательство «Наука», 1987 г. - Т.VII. Теория упругости. - 248 с.
14. Максимов Г.А. О вариационном принципе в диссипативной гидродинамике / Г.А. Максимов. – Москва: «МИФИ», 2006 г. - 36 с.
15. Папок К.К. Смазочные масла / К.К. Папок. – Москва: Военное издательство Министерства Обороны СССР, 1953 г. - 168 с.
16. Петров Н.П. Гидродинамическая теория смазки / Н.П. Петров. - Издательство: АН СССР, 1948 г. – 556 с.
17. Пригожин И.Р. Введение в термодинамику необратимых процессов / И.Р. Пригожин. - Москва: Издательство иностранной литературы, 1960 г. - 160 с.
18. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н.А. Слезкин. – Москва: Издательство технико-теоретической литературы, 1955 г. – 520 с.
19. Терентьев В. Ф. Трибонадежность подшипниковых узлов в присутствии модифицированных смазочных композиций / В. Ф. Терентьев, Н. В. Еркаев, С.Г. Докшанин. – Новосибирск: Издательство «Наука», 2003 г. – 142 с.
20. Швыдский В.С. Математические методы теплофизики / В.С. Швыдский, М.Г. Ладыгичев, В.С. Шаврин. – Москва: Издательство «Машиностроение», 2001 г. – 232 с.
21. Шехтер Р. Вариационный метод в инженерных расчетах / Р. Шехтер. – Москва: Издательство «Мир», 1971 г. – 292 с.
22. Цой П.В. Методы расчета отдельных задач тепломассопереноса / П.В. Цой. – Москва: Издательство «Энергия», 1971 г. – 284 с.

					БР-15.03.03 ПЗ	Лис
						50
Изм.	Лис	№ докум.	Подпис	Дат		